

# ชักรูป โค้งสุดท้าย คณิตศาสตร์ สอบเข้า ม.4 มหิดลวิทยานุสรณ์

โดย อ. กรณ์พงษ์ เจียมเวชวิทยากร

## เรื่องที่ 1 เลขยกกำลัง

1.  $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{คูณกัน } n \text{ ตัว}}$

เรียก  $a$  ว่า ฐาน

เรียก  $n$  ว่า เลขชี้กำลัง

เช่น  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  (นำ 2 คูณกัน 5 ตัว)

2. สมบัติของเลขยกกำลัง

2.1  $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2.2  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  เมื่อ  $a \neq 0$

2.3  $a^0 = 1$  เมื่อ  $a \neq 0$

2.4  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  เมื่อ  $a \neq 0$

2.5  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  เมื่อ  $a \neq 0$

2.6  $(a^m)^n = a^{mn}$

2.7  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

2.8  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  เมื่อ  $b \neq 0$

2.9  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

2.10  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

3. หาค่าตัวแปรจากสมการ

ถ้า  $a^x = a^y$  และ  $x = y$  เมื่อ  $a \neq 0$  และ  $a \neq 1$

เช่น  $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$\therefore x = 5$

## เรื่องที่ 2 พหุนาม

1. **เอกนาม** คือ นิพจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปร ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นศูนย์ หรือจำนวนเต็มบวก เช่น  $4x$ ,  $7xy^2$ ,  $8x^0$   
 นิพจน์ หมายถึง ข้อความที่เขียนในรูปสัญลักษณ์ เช่น  $3$ ,  $x + 1$ ,  $2x^2 + 3x - 1$   
 ตัวแปร หมายถึง ตัวอักษรที่ใช้แทนจำนวน เช่น  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$   
 ค่าคงตัว หมายถึง ตัวเลขที่ใช้แทนจำนวน เช่น  $1$ ,  $5$ ,  $-3$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $2^3$
2. **ดีกรีและสัมประสิทธิ์ของเอกนาม**  
 ดีกรีของเอกนาม คือ ผลบวกเลขชี้กำลังของตัวแปรทั้งหมดในเอกนาม เช่น  $xy^2$  มีดีกรีเท่ากับ 3  
 สัมประสิทธิ์ของเอกนาม คือ ส่วนที่เป็นค่าคงตัวที่ปรากฏในเอกนาม
3. **การบวกและการลบของเอกนาม** เอกนามจะบวกลบกันได้ ก็ต่อเมื่อเป็นเอกนามที่คล้าย และเอกนามที่คล้ายกัน ต้องมีสัมประสิทธิ์ดังนี้
  - 3.1 เป็นเอกนามที่เป็นตัวแปรชุดเดียวกัน
  - 3.2 เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวต้องเท่ากัน  
 เช่น  $4x^2y^4$  เป็นเอกนามที่คล้ายกัน  $8x^2y^4$   
 $-\frac{1}{3}ab^3$  เป็นเอกนามที่คล้ายกับ  $\frac{5}{6}ab^3$
4. **พหุนาม** คือ นิพจน์ที่สามารถเขียนในรูปเอกนาม หรือผลบวกของเอกนามตั้ง  $\pi 2$  เอกนามขึ้นไป เช่น  $1$ ,  $-\frac{3}{4}$ ,  $3x$ ,  $4x - 5y$   
 พหุนามในรูปผลสำเร็จ หมายถึง พหุนามที่ไม่มีเอกนามที่คล้ายกัน  
 ดีกรีของพหุนาม หมายถึง ดีกรีสูงสุดของเอกนามในพหุนามในรูปผลสำเร็จ  
 เช่น  $3x^2y^3 + 4x^2y^3 + 5x^2y^3 - 2x^2y^2 = 8x^2y^3 = 8x^2y^3 + 2x^2y^2$  ดีกรีของพหุนามคือ 5
5. **การบวกลบพหุนาม** ให้นำเอกนามที่คล้ายกันมาบวกลบกัน
6. **การคูณพหุนาม** แบ่งเป็น 3 ประเภท
  - 6.1 การคูณเอกนามด้วยเอกนาม ให้นำสัมประสิทธิ์คูณสัมประสิทธิ์ ตัวแปรคูณตัวแปรโดยอาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง
  - 6.2 การคูณเอกนามด้วยพหุนาม ให้นำเอกนามคูณทุกพจน์ของพหุนาม
  - 6.3 การคูณพหุนามด้วยพหุนาม ให้นำพจน์ทุกพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวคูณ คูณพจน์ทุกพจน์ของ พหุนามที่เป็นตัวตั้ง แล้วทำให้เป็นผลสำเร็จ

**7. การหารพหุนาม แบ่งเป็น 3 ประเภท**

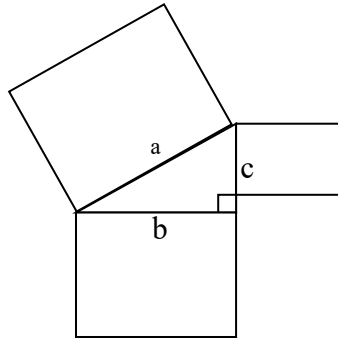
- 7.1 การหารเอกนามด้วยเอกนาม ให้นำสัมประสิทธิ์หารสัมประสิทธิ์ ส่วนตัวแปรหารกัน ให้ใช้สมบัติของเลขยกกำลัง
- 7.2 การหารพหุนามด้วยเอกนาม ให้นำตัวหารที่เป็นเอกนามหารพจน์ทุกพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวตั้ง
- 7.3 การหารพหุนามด้วยพหุนาม ให้ใช้วิธีตั้งหารยาว โดยเรียงกำลังของตัวแปรจากมากไปหาน้อย หรือจากน้อยไปหามาก

**8. สูตรทางพีชคณิตที่ควรทราบ**

- 8.1  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 8.2  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 8.3  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- 8.4  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- 8.5  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- 8.6  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- 8.7  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 8.8  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

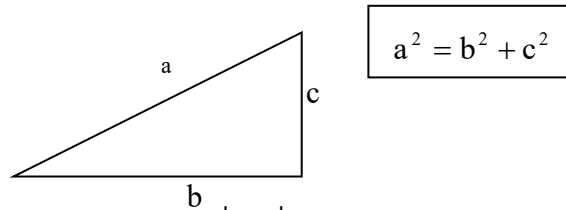
## เรื่องที่ 3 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

1.



ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก จะมีค่าเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากรวมกัน จากรูปเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

2.



จากรูป ถ้า  $a^2 = b^2 + c^2$  รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. รูปร่างมาตรฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นำมาใช้บ่อย ๆ

- 3.1 3, 4, 5
- 3.2 5, 12, 13
- 3.3 7, 24, 25
- 3.4 8, 15, 17
- 3.5 9, 40, 41
- 3.6 11, 60, 61
- 3.7 12, 35, 37
- 3.8 20, 21, 29
- 3.9 1,  $\sqrt{3}$ , 2
- 3.10 1, 1,  $\sqrt{2}$

4. หลักในการพิจารณานิโคของรูปสามเหลี่ยม

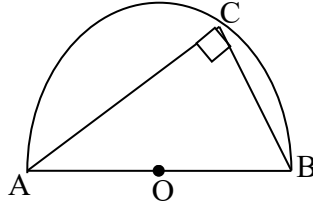
เมื่อ a เป็นความยาวของด้านที่ยาวที่สุด

- 4.1 ถ้า  $a^2 = b^2 + c^2$  แล้ว  $\Delta$  รูปนั้นจะเป็น  $\Delta$  มุมฉาก
- 4.2 ถ้า  $a^2 > b^2 + c^2$  แล้ว  $\Delta$  รูปนั้นจะเป็น  $\Delta$  มุมป้าน
- 4.3 ถ้า  $a^2 < b^2 + c^2$  แล้ว  $\Delta$  รูปนั้นจะเป็น  $\Delta$  มุมแหลม
- 4.4 ถ้า  $a = b + c$  จะเป็นเส้นตรง สร้างเป็นรูป  $\Delta$  ไม่ได้ เช่น 5, 5, 10

## เรื่องที่ 4 วงกลม

### สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

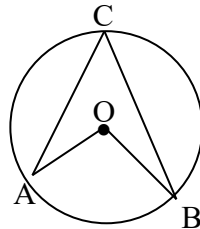
- มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก



จากรูป

$$\hat{A}CB = 90^\circ$$

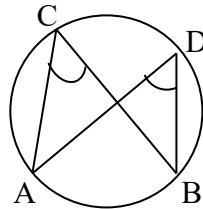
- มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



จากรูป

$$\hat{A}OB = 2\hat{A}CB$$

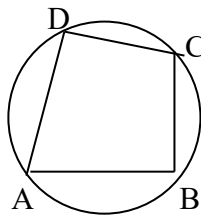
- มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากับ



จากรูป

$$\hat{A}CB = \hat{A}DB$$

- รูปสี่เหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลมโดยจุดทั้งสี่อยู่บนส่วนโค้งของวงกลม มุมตรงข้ามบวกกันได้  $180^\circ$

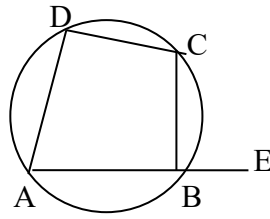


จากรูป

- $\hat{A}DC = \hat{A}BC = 180^\circ$

- $\hat{D}AB = \hat{D}CB = 180^\circ$

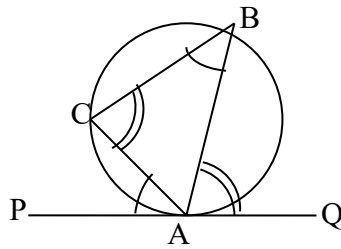
5. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม



จากรูป

$$\widehat{CBE} = \widehat{ADC}$$

6. มุมที่เกิดขึ้นระหว่างเส้นสัมผัสจุดกับคอร์ดย่อมเท่ากับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้าม

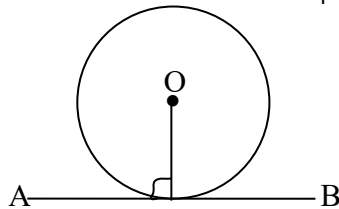


จากรูป

$$1. \widehat{PAC} = \widehat{ABC}$$

$$2. \widehat{QAB} = \widehat{ACB}$$

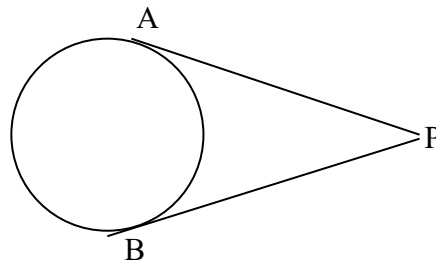
7. เส้นสัมผัสวงกลมย่อมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส



จากรูป

$$OC \perp AB \text{ ที่จุด } C$$

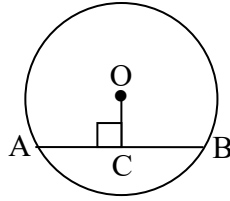
8. เส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกวงกลมจุดหนึ่งมาสัมผัสวงเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน



จากรูป

$$PA = PB$$

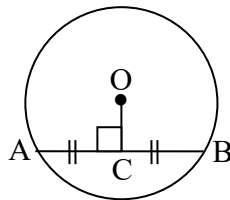
9. ถ้าส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด



จากรูป

$$AC = BC$$

10. ถ้าส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และแบ่งครึ่งคอร์ดที่ใช้เส้นผ่านศูนย์กลางแล้ว ส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด



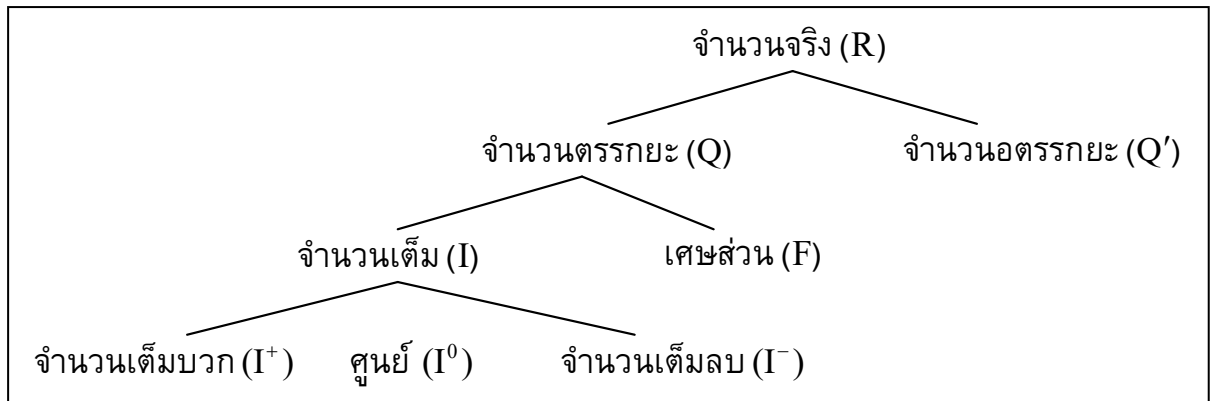
จากรูป

$$OC \perp AB$$

11. ผลบวกของมุมภายในของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= 180(n - 2)$   
 เมื่อ  $n$  แทนจำนวนด้าน
12. มุมภายในแต่ละมุมของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{180(n - 2)}{n}$   
 เมื่อ  $n$  แทนจำนวนด้าน
13. มุมที่จุดศูนย์กลางแต่ละมุมของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{360}{n}$   
 เมื่อ  $n$  แทนจำนวนด้าน
14. มุมภายนอกแต่ละมุมของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{360}{n}$   
 เมื่อ  $n$  แทนจำนวนด้าน
15. จำนวนเส้นทแยงมุม  $= \frac{n}{2}(n - 3)$   
 เมื่อ  $n$  แทนจำนวนด้าน

# เรื่องที่ 5 จำนวนจริง

## โครงสร้างของระบบจำนวนจริง



1. จำนวนตรรกยะ คือจำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปของเศษส่วน โดยส่วนไม่เป็นศูนย์ หรือเขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้ เช่น  $-7, -3, 0, 5, 8, \frac{3}{5}, 0.12$
2. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi, 0, 121221222\dots$
3. จำนวนจริง คือ จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ
4. รากที่สอง ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ  $a$  คือจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้  $a$  ข้อสังเกต
  1. ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว รากที่สองของ  $a$  จะมี 2 ค่า คือ รากที่เป็นบวก และรากที่เป็นลบ ใช้สัญลักษณ์  $\sqrt{a}$  แทนรากที่สองที่เป็นบวกของ  $a$   
 $-\sqrt{a}$  แทนรากที่สองที่เป็นลบของ  $a$
  2. ถ้า  $a = 0$  แล้ว รากที่สองของ  $a$  คือ  $0$
  3. ถ้ารากที่สองของจำนวนจริงบวก ถ้าถอดรากที่สองลงตัว จะเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ถ้าถอดรากที่สองไม่ลงตัว จะเป็นจำนวนอตรรกยะ  
 เช่น รากที่สองของ  $9$  คือ  $\sqrt{9} = 3$  และ  $-\sqrt{9} = -3$   
 รากที่สองของ  $64$  คือ  $\sqrt{64} = 8$  และ  $-\sqrt{64} = -8$
5. รากที่สาม ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ รากที่สามของ  $a$  คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้  $a$  ใช้สัญลักษณ์ “ $\sqrt[3]{a}$ ” แทนรากที่สามของ  $a$   
 เช่น รากที่สามของ  $27$  คือ  $\sqrt[3]{27} = 3$       รากที่สามของ  $125$  คือ  $\sqrt[3]{125} = 5$
6. สมบัติของราก
 

6.1 $\sqrt{a^2} =  a $	6.2 $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
6.3 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	6.4 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$



## เรื่องที่ 6 สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. สมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวน โดยใช้สัญลักษณ์ “=” ซึ่งอาจเป็นจริงหรือเท็จก็ได้
2. การแก้สมการ คือ การหาค่าตัวแปรในสมการนั้น เมื่อนำค่าของตัวแปรที่คำนวณได้ไปแทนค่าในสมการแล้ว จะทำให้สมการนั้นเป็นจริง
3. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และดีกรีเป็นหนึ่ง รูปทั่วไปของสมการคือ  $ax + b = 0$

เมื่อ  $a \neq 0$  และ  $a, b$  เป็นค่าคงตัวที่มี  $x$  เป็นตัวแปร เช่น

$$2x + 4 = 0$$

$$3x - 9 = 21$$

4. สมการที่สมมูลกัน สมการ A สมมูลกับสมการ B ก็ต่อเมื่อคำตอบทุกคำตอบของสมการ A เป็นคำตอบของสมการ B และคำตอบทุกคำตอบของสมการ B เป็นคำตอบของสมการ A

เช่น  $x - 1 = 5$  สมมูลกับ  $7x = 49$

$$2x + 4 = 16 \text{ สมมูลกับ } \frac{x}{2} = 3$$

5. สมบัติของการเท่ากัน

5.1 สมบัติสะท้อน  $a = a$

5.2 สมบัติสมมาตร ถ้า  $a = b$  แล้ว  $b = a$

5.3 สมบัติการถ่ายทอด ถ้า  $a = b$  และ  $b = c$  แล้ว  $a = c$

5.4 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า  $a = b$  แล้ว  $a + c = b + c$

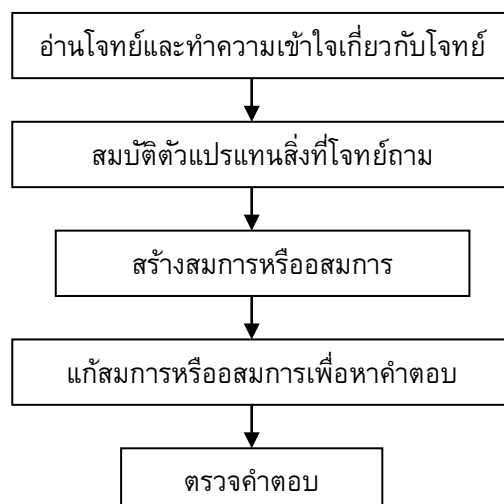
5.5 สมบัติการตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการบวก ถ้า  $a + c = b + c$  แล้ว  $a = b$

5.6 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า  $a = b$  แล้ว  $ac = bc$

5.7 สมบัติการตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการคูณ ถ้า  $ac = bc$  แล้ว  $a = b$  เมื่อ  $c \neq 0$

6. การแก้โจทย์สมการและโจทย์อสมการ

ในการแก้ปัญหาควรดำเนินตามขั้นตอน ดังนี้



7. **อสมการ** คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวน โดยมีสัญลักษณ์  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  หรือ  $\neq$  บอกความสัมพันธ์ของจำนวน

8. **อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** คือ อสมการซึ่งพหุนามในอสมการเป็นพหุนามที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และดีกรีของพหุนามเท่ากับ 1 เช่น

$$3x - 4 < 2x + 5$$

$$4x \neq 24$$

9. **อสมการที่สมมูลกัน** อสมการ A สมมูลกับอสมการ B ก็ต่อเมื่อ คำตอบทุกคำตอบของอสมการ A เป็นคำตอบทุกคำตอบของอสมการ B และคำตอบทุกคำตอบของอสมการ B เป็นคำตอบของอสมการ A

เช่น  $x - 4 < 5$  สมมูลกับ  $2x < x + 9$

$$4x - 6 < 2x + 8$$
 สมมูลกับ  $x < 7$

### 10. สมบัติของการไม่เท่ากัน

ให้ a, b และ c แทนจำนวนใดๆ

#### 10.1 สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า  $a < b$  และ  $b < c$  แล้ว  $a < c$

#### 10.2 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า  $a < b$  แล้ว  $a + c < b + c$

#### 10.3 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

เมื่อ  $c > 0$  ถ้า  $a < b$  แล้ว  $ac < bc$

เมื่อ  $c < 0$  ถ้า  $a < b$  แล้ว  $ac > bc$

#### ข้อควรระวัง

เมื่อนำจำนวนลบมาคูณในอสมการจะต้องเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้าม ดังนี้

$>$  เปลี่ยนเป็น  $<$

$\geq$  เปลี่ยนเป็น  $\leq$

$<$  เปลี่ยนเป็น  $>$

$\leq$  เปลี่ยนเป็น  $\geq$

เช่น

$$-2x > 6$$

$$2x < -6$$

$$x < -3$$

## เรื่องที่ 7 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1. รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น เขียนอยู่ในรูป

$$Ax + By + C = 0$$

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน เช่น

$$2x + 4y + 5 = 0$$

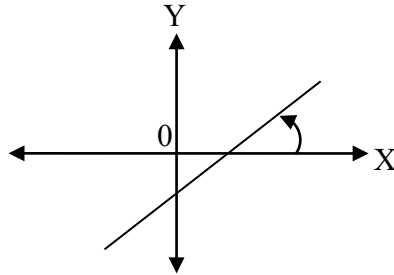
จะได้ A = 2, B = 4, C = 5

2. รูปมาตรฐานของสมการเชิงเส้น เขียนอยู่ในรูป

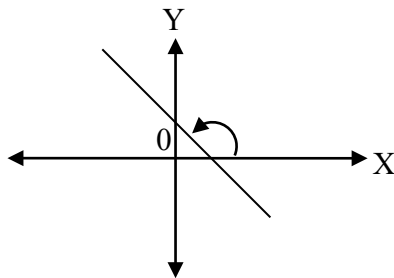
$$y = ax + b$$

รูปมาตรฐาน  $y = ax + b$  นี้ ให้ประโยชน์เกี่ยวกับการสังเกตกราฟเส้นตรงได้ ดังนี้

- 2.1 ถ้า  $a > 0$  กราฟจะเอียงขวาทำมุมแหลมกับแกน X



- 2.2 ถ้า  $a < 0$  กราฟจะเอียงซ้ายทำมุมป้านกับแกน X



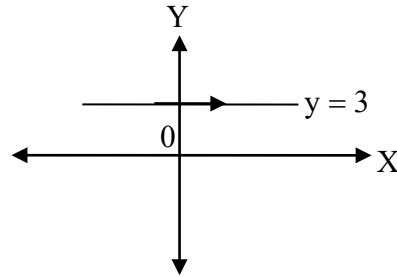
- 2.3 ถ้า a เท่ากัน กราฟจะขนานกัน

- 2.4 ถ้านำค่า a ของทั้งสองสมการมาคูณกันได้ -1 เขียนกราฟแล้ว กราฟจะตัดกันเป็นมุมฉาก

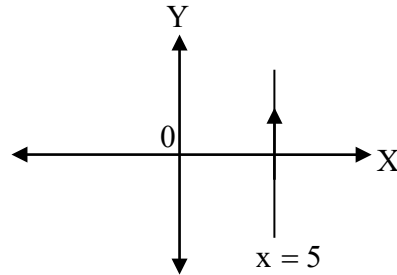
- 2.5 จะหาจุดตัดบนแกน X ให้  $y = 0$

- 2.6 จะหาจุดตัดบนแกน Y ให้  $x = 0$

2.7 กราฟที่ขนานกับแกน X จะไม่มีตัวแปร x ปรากฏในสมการ เช่น  $y = 3$



2.8 กราฟที่ขนานกับแกน Y จะไม่มีตัวแปร y ปรากฏในสมการ เช่น  $x = 5$



2.9 แกน X มีสมการเส้นตรงคือ  $y = 0$

2.10 แกน Y มีสมการเส้นตรงคือ  $x = 0$

2.11 จาก  $y = ax + b$  ถ้า  $b = 0$  แล้ว กราฟเส้นตรงจะผ่านจุดกำเนิด

### 3. วิธีแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

3.1 โดยวิธีกราฟ เขียนกราฟเส้นตรง จุดตัดคือคำตอบของสมการ

3.2 โดยวิธีกำจัดตัวแปร โดยพยายามทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่เราต้องการกำจัดให้เท่ากัน แล้วนำสมการมาบวกหรือลบกัน

3.3 โดยวิธีแทนค่า หาค่าตัวแปรตัวหนึ่งในรูปของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง แล้วแทนค่าในอีกสมการ

### 4. สูตรเกี่ยวกับกระแสน้ำ

4.1 ความเร็วตามน้ำ = ความเร็วในน้ำนิ่ง + ความเร็วกระแสน้ำ

4.2 ความเร็วทวนน้ำ = ความเร็วในน้ำนิ่ง - ความเร็วกระแสน้ำ

4.3 ความเร็วในน้ำนิ่ง =  $\frac{\text{ความเร็วตามน้ำ} + \text{ความเร็วทวนน้ำ}}{2}$

4.4 ความเร็วกระแสน้ำ =  $\frac{\text{ความเร็วตามน้ำ} - \text{ความเร็วทวนน้ำ}}{2}$

## เรื่องที่ 8 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

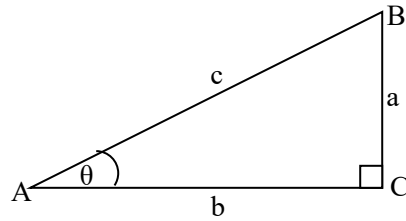
### 1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มี a เป็นด้านตรงข้ามมุม A

b เป็นด้านตรงข้ามมุม B

c เป็นด้านตรงข้ามมุม C



$$\sin A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม A}} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{c}{a}$$

2. ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ

2.1  $\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$

2.2  $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

2.3  $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

2.4  $\cos A \cdot \sec A = 1$

2.5  $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

2.6  $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

2.7  $\tan A \cdot \cot A = 1$

2.8  $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

2.9  $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

2.10  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

2.11  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

3. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sine	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosine	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangent	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

4.1  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

4.2  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

4.3  $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

4.4  $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

4.5  $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

4.6  $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

4.7  $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

4.8  $\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1$

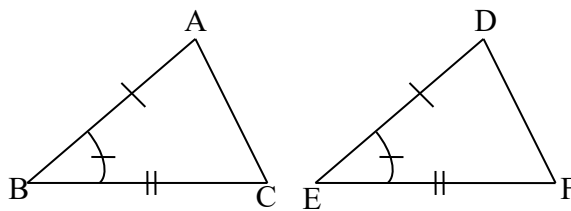
## เรื่องที่ 9 เรขาคณิต

### 1. ทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นตรง

- 1.1 ถ้าเส้นตรง 2 เส้นตัดกันแล้ว มุมตรงข้ามจะเท่ากัน
- 1.2 เส้นตรง 2 เส้นจะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นนั้น แล้วทำให้มุมแย้งเท่ากัน

### 2. ทฤษฎีเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม

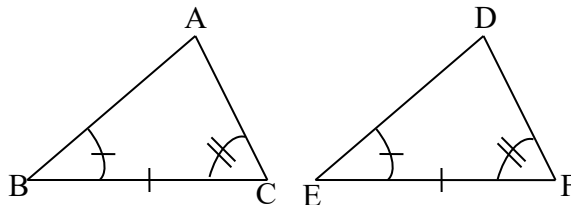
- 2.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีด้านเท่ากัน 2 คู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากัน เท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.)



จากรูป  $AB = DE$ ,  $\hat{A}BC = \hat{D}EF$ ,  $BC = EF$

แล้ว  $\triangle ABC = \triangle DEF$

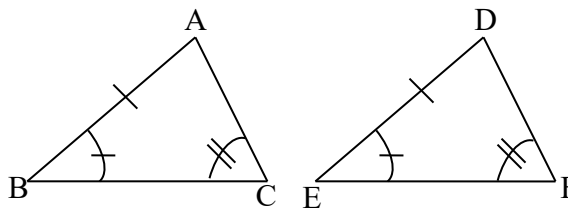
- 2.2 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีมุมเท่ากัน 2 คู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่เท่ากัน เท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)



จากรูป  $\hat{A}BC = \hat{D}EF$ ,  $BC = EF$ ,  $\hat{A}CB = \hat{D}FE$

แล้ว  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

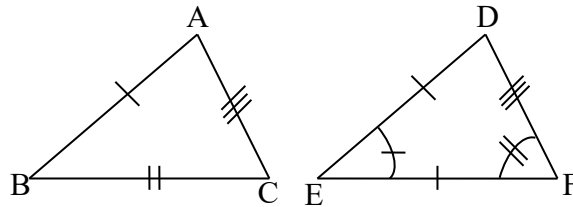
- 2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากัน 2 คู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่ง แล้วรูปสามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์แบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)



จากรูป  $\hat{A}BC = \hat{D}EF$ ,  $\hat{A}CB = \hat{D}FE$ ,  $AB = DE$

แล้ว  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

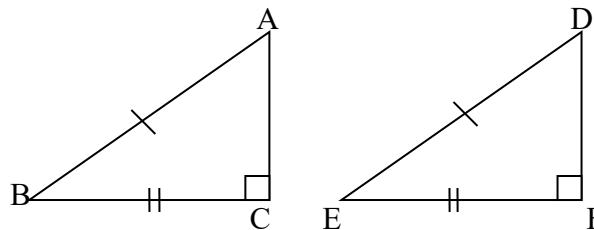
- 2.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากัน 3 คู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)



จากรูป  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $AC = DF$

แล้ว  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

- 2.5 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์แบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)



จากรูป  $\hat{A}CB = \hat{D}FE = 90^\circ$ ,  $AB = DE$ ,  $BC = EF$

แล้ว  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

### 3. ทฤษฎีเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม

- 3.1 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่
- 3.2 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
- 3.3 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน
- 3.4 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน แต่มุมไม่เป็นมุมฉาก
- 3.5 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันเพียงหนึ่งคู่
- 3.6 รูปสี่เหลี่ยมใดๆเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน
- 3.7 มุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ รวมกันได้ 360 องศา
- 3.8 รูปสี่เหลี่ยมใดๆจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน



## เรื่องที่ 10 พื้นที่ผิวและปริมาตร

### 1. สูตรพื้นที่ที่นำมาใช้

1.1 พื้นที่รูปสามเหลี่ยม =  $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

1.2 พื้นที่รูปสามเหลี่ยมในกรณีที่ทราบความยาวทั้งสามด้าน แต่ไม่ทราบความสูง  
 พื้นที่รูปสามเหลี่ยม =  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

เมื่อ  $s = \frac{a+b+c}{2}$

a, b, c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

1.3 พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า =  $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ด้าน}^2$

1.4 พื้นที่รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า =  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{ด้าน}^2 \times 6$

1.5 พื้นที่วงกลม =  $\pi r^2$

1.6 พื้นที่รูปวงแหวน =  $\pi(R^2 - r^2)$

1.7 พื้นที่รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง =  $\frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$

### 2. พื้นที่ผิวและปริมาตรรูปทรงต่าง ๆ

#### 2.1 รูปพีระมิด

2.1.1 พื้นที่ผิวข้าง =  $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวเส้นรอบฐาน} \times \text{สูงเอียง}$

2.1.2 พื้นที่ผิว = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

2.1.3 ปริมาตร =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง}$

#### 2.2 รูปทรงกระบอก

2.2.1 พื้นที่ผิวข้าง =  $2 \pi r h$

เมื่อ r = รัศมี, h = ความสูง

2.2.2 พื้นที่ผิว = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

=  $2\pi r^2 + 2\pi r h$

=  $2\pi r(r + h)$

2.2.3 ปริมาตร =  $\pi r^2 h$

2.3 รูปกรวยกลม

2.3.1 พื้นที่ผิวข้าง =  $\pi r l$

เมื่อ  $r$  = รัศมี,  $l$  = สูงเอียง

2.3.2 พื้นที่ผิว = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$$= \pi r^2 + \pi r l$$

$$= \pi r (r + l)$$

2.3.3 ปริมาตร =  $\frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน  $\times$  สูงตรง

$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

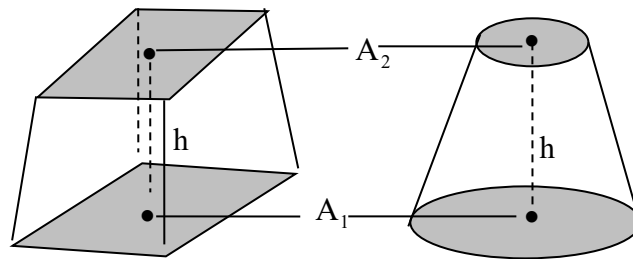
$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

2.4 รูปทรงกลม

2.4.1 พื้นที่ผิว =  $4 \pi r^2$  เมื่อ  $r$  = รัศมี

2.4.2 ปริมาตร =  $\frac{4}{3} \pi r^3$

2.5 รูปพีระมิตยอดตัดและกรวยกลมยอดตัด



$A_1$  = พื้นที่หน้าตัดด้านล่าง

$A_2$  = พื้นที่หน้าตัดด้านบน

$h$  = ระยะห่างระหว่างหน้าตัดด้านบนและด้านล่าง

ปริมาตร =  $\frac{1}{3} \times h \times (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$

## เรื่องที่ 11 การแยกตัวประกอบและเศษส่วนของพหุนาม

1. การแยกตัวประกอบของพหุนาม คือ การทำพหุนามนั้นในรูปผลคูณของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าพหุนามเดิม

2. การแยกตัวประกอบโดยการดึงตัวร่วมออก ใช้สมบัติการแจกแจง เช่น

$$ax + ay = a(x + y)$$

3. การแยกตัวประกอบโดยทำให้อยู่ในรูปผลคูณของ 2 วงเล็บ เช่น

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$

$$x^2 - (p + q)x + pq = (x - p)(x - q)$$

4. การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สูตรผลต่างกำลังสอง

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

5. การแจกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC = (A - B - C)^2$$

6. การแยกตัวประกอบที่มีดีกรีสูงกว่าสอง โดยใช้สูตร

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

7.  $p$  และ  $q$  เป็นพหุนามสองพหุนาม โดยที่  $q \neq 0$  เราเรียก  $\frac{p}{q}$  ว่า “เศษส่วนของพหุนาม”

8. การคูณ หาร บวก ลบ เศษส่วน

8.1 การคูณเศษส่วน ใช้  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  เมื่อ  $b, d \neq 0$

8.2 การหารเศษส่วน ใช้  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$  เมื่อ  $b, c, d \neq 0$

8.3 การบวกเศษส่วน ใช้  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$  เมื่อ  $b, d \neq 0$

8.4 การลบเศษส่วน ใช้  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$  เมื่อ  $b, d \neq 0$

## 9. การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม

หลักการแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม

9.1 ใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริงเข้าช่วย

9.2 การนำพหุนามที่มากุณหรือหารสมการต้องไม่เท่ากันศูนย์

9.3 สมการทุกสมการเมื่อได้คำตอบแล้วต้องตรวจคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่

## 10. โจทย์สมการเศษส่วน

หลักการแก้โจทย์สมการ

10.1 อ่านโจทย์ให้เข้าใจว่าโจทย์ถามอะไร

10.2 สมมติตัวแปรแทนตัวที่โจทย์ต้องการหา

10.3 นำตัวแปรมาสร้างสมการโดยให้สัมพันธ์กับโจทย์

10.4 แก้สมการโดยวิธีแยกตัวประกอบหรือสูตร

10.5 ตรวจสอบคำตอบของสมการเสมอ

## เรื่องที่ 12 สมการกำลังสอง

1. สมการกำลังสอง กำหนดด้วยสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$

2. การแก้สมการกำลังสอง มีดังนี้

2.1 การแก้สมการโดยวิธีแยกตัวประกอบ เช่น

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ถ้า  $ax^2 + bx + c = [P(x)][Q(x)]$  แล้ว

$$[P(x)][Q(x)] = 0$$

จะได้  $P(x) = 0$  หรือ  $Q(x) = 0$

2.2 การแก้สมการโดยวิธีทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งจะได้  $[P(x)][Q(x)] = 0$  เช่นกัน

2.3 การแก้สมการโดยใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ถ้า  $b^2 - 4ac = 0$  คำตอบของระบบสมการจะมี 1 คำตอบ

ถ้า  $b^2 - 4ac > 0$  คำตอบของระบบสมการจะมี 2 คำตอบ

ถ้า  $b^2 - 4ac < 0$  จะไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

2.4 แก้สมการโดยวิธีกราฟ

3. โจทย์สมการกำลังสอง

หลักการแก้โจทย์สมการ

3.1 สมมติตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่า

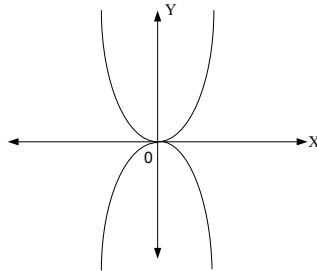
3.2 สร้างสมการตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

3.3 แก้สมการ

3.4 ตรวจสอบคำตอบว่าเป็นจริงหรือไม่

## เรื่องที่ 13 พาราโบลา

1. รูปทั่วไปของกราฟพาราโบลา คือ  $y = ax^2 + bx + c$  โดยที่  $a \neq 0$  เพราะถ้า  $a = 0$  จะเป็นสมการของกราฟเส้นตรง
2. กราฟพาราโบลามีสมการอยู่ 5 รูปแบบ ดังนี้
  - 2.1  $y = ax^2$  ( $b = 0, c = 0$ ) เขียนกราฟได้ลักษณะดังนี้

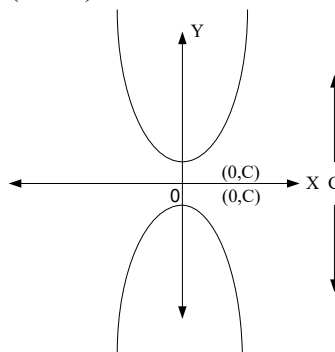


ถ้า  $a > 0$  จะได้กราฟหงาย ให้ค่าต่ำสุด  $y = 0$

ถ้า  $a < 0$  จะได้กราฟคว่ำ ให้ค่าสูงสุด  $y = 0$

จุดยอดของกราฟคือ  $(0, 0)$  แกนสมมาตร  $x = 0$

- 2.2  $y = ax^2 + c$  ( $b = 0$ ) เขียนกราฟได้ลักษณะดังนี้



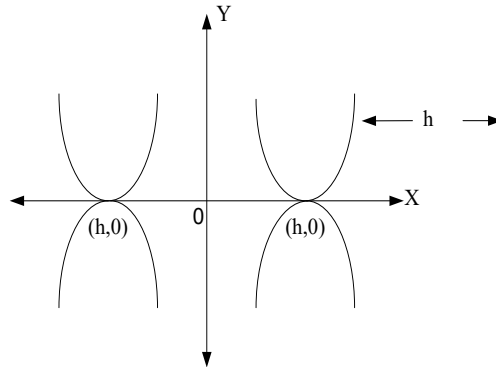
กราฟขึ้นลง ขึ้นอยู่กับค่า  $c$

ถ้า  $a > 0$  จะได้กราฟหงาย ให้ค่าต่ำสุด  $y = c$

ถ้า  $a < 0$  จะได้กราฟคว่ำ ให้ค่าสูงสุด  $y = c$

จุดยอดของกราฟคือ  $(0, c)$  แกนสมมาตร  $x = 0$

2.3  $y = a(x - h)^2$  เขียนกราฟได้ลักษณะดังนี้



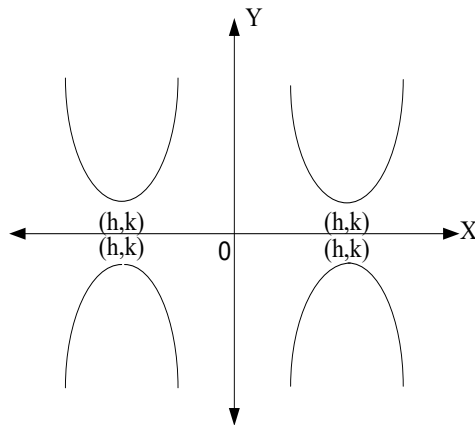
กราฟเคลื่อนที่ไปทางซ้ายหรือทางขวา ขึ้นอยู่กับค่า  $h$

ถ้า  $a > 0$  จะได้กราฟหงาย ให้ค่าต่ำสุด  $y = 0$

ถ้า  $a < 0$  จะได้กราฟคว่ำ ให้ค่าสูงสุด  $y = 0$

จุดยอดของกราฟคือ  $(h, 0)$  แกนสมมาตร  $x = h$

2.4  $y = a(x - h)^2 + k$  เขียนกราฟได้ลักษณะดังนี้



กราฟขึ้นลง ขึ้นอยู่กับค่า  $h$  และ  $k$

ถ้า  $a > 0$  จะได้กราฟหงาย ให้ค่าต่ำสุด  $y = k$

ถ้า  $a < 0$  จะได้กราฟคว่ำ ให้ค่าสูงสุด  $y = k$

จุดยอดของกราฟคือ  $(h, k)$  แกนสมมาตร  $x = h$

2.5  $y = ax^2 + bx + c$  สามารถจัดรูปสมการนี้ให้อยู่ในรูป  $y = a(x - h)^2$  หรือ  $y = a(x - h)^2 + k$  ได้โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

หรือ หาค่า  $h$  ได้จากสูตร  $h = -\frac{b}{2a}$

หาค่า  $k$  ได้จากสูตร  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$

## เรื่องที่ 14 ระบบสมการ

การแก้ระบบสมการ แบ่งออกได้เป็น 3 กรณี ดังนี้

### 1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นกับสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้นมีรูปของสมการคือ  $Ax + By + C = 0$

หลักการแก้สมการ

1.1 นำสมการเชิงเส้นมาหาค่า  $x$  ในเทอมของ  $y$  หรือหาค่า  $y$  ในเทอมของ  $x$

1.2 นำค่า  $x$  หรือค่า  $y$  แทนค่าในสมการเชิงเส้นที่เหลือ เพื่อหาค่า  $x$  และ  $y$

### 2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง

สมการเชิงเส้นมีรูปแบบของสมการคือ  $Ax + By + C = 0$

สมการดีกรีสอง เช่น  $x^2 + y^2 = 25$

$$3x^2 - 2xy = 8$$

$$xy - 4y^2 = 9$$

หลักการแก้สมการ

2.1 นำสมการเชิงเส้นมาหาค่า  $x$  ในเทอมของ  $y$  หรือหาค่า  $y$  ในเทอมของ  $x$

2.2 นำค่า  $x$  หรือค่า  $y$  แทนค่าในสมการดีกรีสองที่เหลือ เพื่อหาค่า  $x$  หรือ  $y$

### 3. การแก้สมการดีกรีสอง และสมการดีกรีสอง

หลักการแก้สมการ

ทำให้ตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งหมดไปก่อน แล้วหาค่าตัวแปรที่เหลือ



## เรื่องที่ 15 ความน่าจะเป็น

1. ความน่าจะเป็น หมายถึง จำนวนที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์หนึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ =  $\frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ที่เราสนใจ}}{\text{จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด}}$

$$\text{หรือ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ  $P(E)$  = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

$n(E)$  = จำนวนเหตุการณ์ที่เราสนใจ

$n(S)$  = จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด

3. ทฤษฎีความน่าจะเป็น

ถ้า  $S$  แทนแซมเปิลสเปซ

$E$  แทนเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ

จะได้ว่า

3.1  $0 \leq P(E) \leq 1$

3.2  $P(E) = 1$  เมื่อ  $n(E) = n(S)$

3.3  $P(E) = 0$  แสดงว่า เหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้น

## เรื่องที่ 16 สถิติ

1. **สถิติ** หมายถึง ตัวเลขที่ใช้แทนข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่อาจจะพยากรณ์ล่วงหน้าได้หรือไม่ หรือหมายถึง การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความ

2. **ตารางแจกแจงความถี่**

- 2.1 **พิสัย** คือ ความแตกต่างของข้อมูลทีมากที่สุดกับข้อมูลที่น้อยที่สุด

$$\text{พิสัย} = \text{Max} - \text{Min}$$

- 2.2 **จำนวนอันตรภาคชั้น** =  $\frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น}}$

ถ้าหารแล้วมีเศษ ให้ปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็ม

ถ้าหารแล้วลงตัว ให้บวกหนึ่ง

- 2.3 **ขอบล่าง** =  $\frac{\text{ค่าน้อยที่สุดในชั้นนั้น} + \text{ค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าในชั้นที่มากกว่า}}{2}$

- 2.4 **ขอบบน** =  $\frac{\text{ค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าในชั้นนั้น} + \text{ค่าน้อยที่สุดในชั้นที่สูงกว่า}}{2}$

- 2.5 **ความกว้างของอันตรภาคชั้น** = ขอบบน - ขอบล่าง

- 2.6 **จุดกึ่งกลางชั้น** =  $\frac{\text{คะแนนต่ำสุดในชั้นนั้น} + \text{คะแนนสูงสุดที่น้อยกว่าในชั้นนั้น}}{2}$

3. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** ( $\bar{x}$ ) =  $\frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูล}}$

$$\text{หรือ } \bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ  $\sum x$  = ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด

$N$  = จำนวนข้อมูล

4. **ค่ามัธยฐาน** ใช้อักษรย่อ Mdn หรือ Me หมายถึง ค่าที่มีตำแหน่งอยู่ตรงกึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด เรียงข้อมูลจากน้อยที่สุดไปหามากที่สุด หรือเรียงข้อมูลจากมากที่สุดไปหาน้อยที่สุด

ค่ามัธยฐาน ถ้าข้อมูลมีเป็นจำนวนคี่ เช่น 5, 7, 9 ค่ามัธยฐานจะมีเพียงค่าเดียว แต่ถ้าข้อมูลมีเป็นจำนวนคู่ เช่น 4, 6, 8 ค่ามัธยฐานจะมี 2 จำนวน หากค่ามัธยฐานได้โดยนำข้อมูลที่ตรงกึ่งกลางทั้งสองบวกกันหารด้วย 2

5. **ฐานนิยม** ใช้อักษรย่อ Mo หมายถึง ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด

## เรื่องที่ 17 การแปรผัน

1. การแปรผัน คือ ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของสองสิ่งหรือมากกว่า โดยที่สิ่งหนึ่งเปลี่ยนไป อีกสิ่งหนึ่ง จะเปลี่ยนตามไปด้วยอย่างได้สัดส่วน จะใช้สัญลักษณ์ “ $\alpha$ ” แสดงการแปรผัน
2. ชนิดของการแปรผัน
 

การแปรผันแบ่งออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

  - 2.1 การแปรผันตรง
 

ถ้า  $y$  แปรผันตรงกับ  $x$  จะได้  $y = kx$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$
  - 2.2 การแปรผันแบบผกผัน
 

ถ้า  $y$  แปรผันแบบผกผันกับ  $x$  จะได้  $y = \frac{k}{x}$   
 เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$
  - 2.3 การแปรผันแบบเกี่ยวเนื่อง แบ่งเป็น
    - 2.3.1 ถ้า  $y$  แปรผันตรงกับ  $x$  และ  $z$  จะได้  $y = kxz$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$
    - 2.3.2 ถ้า  $y$  แปรผันตรงกับ  $x$  และแปรผันแบบผกผันกับ  $z$  จะได้  $y = \frac{kx}{z}$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$
    - 2.3.3 ถ้า  $y$  แปรผันแบบผกผันกับ  $x$  และ  $z$  จะได้  $y = \frac{k}{xz}$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว และ  $k \neq 0$
3. การนำไปใช้ แยกได้ 3 กรณี ดังนี้
  - 3.1 เมื่อจำนวนหนึ่งเท่ากับผลการบวกของ 2 จำนวน โดยจำนวนหนึ่งคงตัว อีกจำนวนหนึ่งแปรผันไป
  - 3.2 เมื่อจำนวนหนึ่งเท่ากับผลบวกของ 2 จำนวน โดยที่แต่ละจำนวนแปรผันไป
  - 3.3 เมื่อจำนวนหนึ่งแปรผันตามผลบวกของ 2 จำนวน และแต่ละจำนวนแปรผันไป

1. กำหนดให้  $x + y + xy = 11$

$$y + z + yz = 5$$

$$x + z + xz = 31$$

จงหาค่าของ  $x + y + z + xy + xz + yz$

2. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $7x + 3y = 4$  และ  $3x + 5y = -3$  และ  $x = -4$  เท่ากับกี่หน่วย

3. ให้  $P(x)$  เป็นพหุนามซึ่งมีเพียง  $P\left(\frac{4}{5}\right)$  และ  $P\left(\frac{-3}{5}\right)$  เท่านั้นที่ทำให้คำตอบเป็น 0 จงหาว่า  $P(0)$  มีค่าเท่าไร

4. ถ้า  $A$  เป็นมุมแหลมและ  $\cos A = \frac{2}{3}$  แล้ว  $\frac{\operatorname{cosec}^2 A + \tan^2 (90^\circ - A)}{\sec A}$  มีค่าเท่าใด

5. ถ้ากราฟของสมการ  $y = ax + 5$  ตัดกับกราฟของสมการ  $ax + by = 0$  ที่  $(-2, 2)$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่าไร

6. ถ้า  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าไม่เกิน 3 แล้วค่า  $\frac{a}{b}$  ที่มากกว่า  $\frac{3}{5}$  แต่น้อยกว่า  $\frac{5}{3}$  มีทั้งหมดกี่ค่า

7. เมื่อหารพหุนาม  $X^{100} - 2x^{99} + 4$  ด้วย  $(x^2 - 3x + 2)$  แล้วเศษที่ได้จะมีค่าเท่ากับเท่าไร

8. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ  $7x - 3y = 0$ ,  $3x + 5y = -3$  และ  $x = -4$  มีค่ากี่ตารางหน่วย

9. ผลต่างของจำนวนจริง  $k$  ที่ทำให้กราฟพาราโบลา

$y = kx^2 + 5kx + 3x + 6k + 5$  มีจุดยอดอยู่บนแกน  $x$  เท่ากับเท่าไร

10. ถ้า  $a, b, c$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง  $a^3 < b^3 < c^3 < 700$  แล้วค่าสูงสุดของ  $(a^2 + b^2 + c^2)$  มีค่าเท่าใด

11. กำหนดให้  $a$  เป็นรากคำตอบของสมการ

$$2(2 - \sqrt{3})^x (\sqrt{3} + 1) + 4^x (2 + \sqrt{3})^x (\sqrt{3} - 1) = 4(2^x)$$

จงหาค่าของ  $4a^2 + 1$

12. ให้  $x = \frac{\sqrt[3]{11} + 3}{2}$  และ  $y = \frac{\sqrt[3]{11} - 3}{2}$   
 จงหาค่าของ  $x^6 - y^6 - 3x^2y^2(x^2 - y^2)$

13. กำหนดให้  $\left(\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right)^{1+x} = (80 + 32\sqrt{6})^{1-3x}$  จงหาค่าของ  $7x + 8$



14. ถ้า  $7(5x + \frac{5}{14}) \geq 4(9x - 7) + 9$  แล้วจำนวนเต็ม  $x$  ที่มากที่สุดที่ทำให้สมการเป็นจริง มีค่าเท่าใด

15. มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีฟ้า 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก สุ่มหยิบมา 2 ลูก โอกาสที่จะได้สีแดง 1 ลูก และสีฟ้า 1 ลูก เป็นเท่าใด

16.  $\frac{x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)}{(x - y)(z - y)(x - z)}$  จงเปลี่ยนเป็นรูปอย่างง่าย

17. จงหาผลลัพธ์ของ  $\frac{9}{5} \left( \frac{88^5 - 53^5 - 35^5}{88^3 - 53^3 - 35^3} \right)$

18. กำหนดให้  $x + y + z = 2559$   $xyz = 792$  และ

$$\frac{2556}{1317} = \frac{x}{x^2 - 2558x + 792} + \frac{y}{y^2 - 2558y + 792} + \frac{z}{z^2 - 2558z + 792}$$

จงหาค่าของ  $xy + yz + xz$

19.  $2016 + \left(\frac{1}{2} \times 2015\right) + \left(\frac{1}{2^2} \times 2014\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2014}} \times 2\right) = ?$

20.  $\frac{2016^3 - 2000^3 - 16^3}{2016 \times 2000 \times 16}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

21.  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0$  แล้ว จงหาค่าของ

$80 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8$  มีค่าเท่าไร

22. ให้  $a, b, c, d, e$  เป็นจำนวนใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^6} \text{ มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าไร}$$

23. ถ้า  $n^3 = 1003003001$  จงหาค่าของ  $n^2 - 1000n - 1$

24. ให้  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า  $ab - 25a - 25b = 1575$  และ  $(a, b) = 5$  จงหา  $|a - b|$

25. ให้  $a, b, c, d$  เป็นค่าคงที่ และ  $P(x) = ax^9 + bx^7 + cx^5 + dx^3 + 30$  และ  $P(-3) = 3$  แล้ว  $P(3)$  เท่ากับเท่าไร

26. ถ้า  $x$  เป็นจำนวนนับ และสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{45}{x^2-x-2} \quad \text{แล้ว } \frac{7x}{6-x} \text{ มีค่าเท่าใด}$$

27.  $A = \frac{(20162015)^2}{(20162014)^2 + (20162016)^2 - 2}$  แล้ว  $2016A$  มีค่าเท่าใด

28. ถ้า  $b$  เป็นค่าคงตัวซึ่งมีค่าคงตัว  $a$  เพียงค่าเดียวเท่านั้น ที่ทำให้จุดยอดของพาราโบลา  $y = x^2 - 2ax + 2a^2$  อยู่บนเส้นตรง  $y = x + b$

29. สมการ  $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$  เป็นกราฟรูปอะไร

30. ถ้า  $A = 3889^3 - 3889^2 \times 3888 - 3889 \times 3888^2 + 3888^3$  แล้ว  $A$  มีค่าเท่าใด