สรุปสูตรคณิต

ม.4 - ม.6

โดย

อ. กรณ์พงษ์ เจียมเวชวิทยาภร

Annop Academic Achievement
หลักสูตรโดย อาจารย์ อรรณพ สุขธำรง
ศ.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง เหรียญทอง

เรื่อง เซต (SET)

1. **ชนิดของเซต**

   1.1. เซตจำกัด คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิก แน่นอนและถือว่าเซตว่างเป็นเซตจำกัด

   1.2. เซตอนันต์ คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด (จำนวนสมาชิกไม่แน่นอน)

2. $A \subset B$ หมายถึง สมาชิกทุกตัวของเซต A จะเป็นสมาชิกของเซต B ด้วย แทนด้วย $\forall x[x \in A \to x \in B]$

   (ข้อควรจำ $\phi \subset A$ เสมอ)

3. ถ้า A มีสมาชิก n ตัว จะมีสับเซตที่เป็นไปได้อยู่ 2^n สับเซต

4. $P(A)$ คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A แทนด้วย $(P)A = \{B | B \subset A\}$

   4.1. $\phi \in P(A)$ เสมอ เพราะ $\phi \subset A$ ไม่ว่า A จะเป็นเซตใด

   4.2. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ และ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

5. $A' = \{x | x \in U$ แต่ $x \notin A\}$ และ $A - B = \{x | x \in A$ แต่ $x \notin D\}$

6. **คุณสมบัติของ Operation**

   $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$

   $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B'$

   $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B' = B' - A'$

7. **สูตรลดทอน**

   $A \cap \phi = \phi, \quad A \cup \phi = A$

   $A \cap U = A, \quad A \cup U = U$

   $A \cap (A \cup B) = A, \ A \cup (A \cap B) = A$

   $A \cap (A' \cup B) = A \cap B, A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

   $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A, (A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

8. **สูตรหาจำนวนสมาชิกของเซต**

   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C)$

   $- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

เรื่อง ระบบจำนวนจริง (Real Number System)

1. **ค่าสัมบูรณ์**

   1.1. $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

   1.2. $\sqrt{x^2} = |x|$ และ $|-x| = |x|$

   1.3. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

   1.4. $|xy| = |x||y|$ และ $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|$ เมื่อ $y \neq 0$

   1.5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ และ $||x| - |y|| \leq |x - y|$

2. **อสมการ**

   2.1. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ จะได้ว่า $ac < bc$

   ถ้า $a <= b$ และ $c < 0$ จะได้ว่า

   $ac > bc$

   2.2. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ จะได้ว่า

   $a + c < b + d$

   2.3. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้วจะได้ว่า $0 < ac < bd$

   2.4. ถ้า $a > 0$

   2.4.1. $|x| \leq a$ หมายความว่า

   $-a \leq x \leq a$

   2.4.2. $|x| \geq a$ หมายความว่า $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

3. **คุณสมบัติของจำนวนเต็ม**

   3.1. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

   3.2. ถ้า $a|b$ และ $b \neq 0$ จะได้ $|a| \leq |b|$

3.3. ถ้า $d=(m,n)$ จะมี $x,y\in I$ ซึ่ง

$d=mx+ny$

3.4. ถ้ามี x,y ซึ่ง $mx+ny=1$ จะได้

$(m,n)=1$

3.5. p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $p|mn$ จะได้ว่า

$p|m$ หรือ $p|n$

3.6. d และ c เป็น ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ จำนวนเต็มบวก m และ n ตามลำดับ จะได้ว่า $dc=mn$

เรื่อง ตรรกศาสตร์ (Logic)

1. **ประพจน์** คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (T) หรือเป็นเท็จ (F)
2. **ประโยคเปิด** คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ ที่มีตัวแปรอยู่อย่างน้อยหนึ่งตัว และอาจเปลี่ยนเป็นประพจน์ได้โดยการแทนค่าตัวแปรหรือเติมตัวบ่งปริมาณ
3. **หลักการจำค่าความจริงของประพจน์เมื่อมีตัวเชื่อม**

   3.1. และ $(\wedge)$ $T\wedge T$ ได้ T ที่เหลือ F หมด

   3.2. หรือ $(\vee)$ $F\vee F$ ได้ F ที่เหลือ T หมด

   3.3. ถ้า...แล้ว $(\rightarrow)$ $T\rightarrow F$ ได้ F ที่เหลือ T หมด

   3.4. ก็ต่อเมื่อ $(\leftrightarrow)$ ตรงกันได้ T ต่างกันได้ F
4. **ประพจน์ที่สมมูลกัน** หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี
5. **สัจนิรันดร์** หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เช่น $p\vee\sim p$
6. **คอนทราดิชัน** หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ เช่น $p\wedge\sim p$
7. **คุณสมบัติของ Operation**

$$p\wedge p\equiv p,$$

$$p\vee p\equiv p$$

$$p\wedge q\equiv q\wedge p,\quad p\vee q\equiv q\vee p$$

$$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r),(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$$

$$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(q\wedge r),\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q,$

$p\rightarrow q\equiv\sim q\rightarrow\sim p$

$p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p),\ p\leftrightarrow q\equiv\sim p\leftrightarrow\sim q$

(สูตรลดทอนลักษณะเดียวกับเรื่อง Set โดยเปลี่ยน $\cap$ เป็น $\wedge,\cup$ เป็น $\vee,'$ เป็น $\sim,U$ เป็น T,ϕ เป็น F)

8. **นิเสธ**

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim(p\vee q)\equiv\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$\sim(p\rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q,\sim(p\leftrightarrow q)\equiv\sim p\leftrightarrow q\equiv p\leftrightarrow\sim q$

$\sim\forall x[P(x)]\equiv\exists x[\sim P(x)],\sim\exists x[P(x)]\equiv\forall x[\sim P(x)]$

9. **การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ**

$\forall x[P(x)]$ จะเป็น T เมื่อเซตคำตอบเป็น U ไม่เช่นนั้นจะเป็น F

$\exists x[P(x)]$ จะเป็น F เมื่อเซตคำตอบเป็น ϕ ไม่เช่นนั้นจะเป็น T

$\forall x\forall y[P(x,y)]$ จะเป็น T เมื่อสำหรับแต่ละ x $\forall y[P(x,y)]$ เป็นจริง

$\forall x\exists y[P(x,y)]$ จะเป็น T เมื่อสำหรับแต่ละ x $\exists y[P(x,y)]$ เป็นจริง

$\exists x\forall y[P(x,y)]$ จะเป็น T เมื่อมีบางค่าของ x ซึ่ง $\forall y[P(x,y)]$ เป็นจริง

$\exists x\exists y[P(x,y)]$ จะเป็น T เมื่อมีบางค่าของ x ซึ่ง $\exists y[P(x,y)]$ เป็นจริง

10. ข้อความ $p_1,p_2,.....,p_n$ ชุดหนึ่ง จะสามารถสรุป c ได้อย่างสมเหตุสมผล เมื่อ $(p_1\wedge p_2\wedge.....\wedge p_n)\rightarrow c$

11. รูปแบบสมเหตุสมผลที่ใช้บ่อย

11.1. $[(p \to q) \wedge p] \to q$

11.2. $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

11.3. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

11.4. $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$ หรือ

$\sim p \vee \sim q$

11.5. $[(p \vee q) \wedge \sim q] \to q$

11.6. $(p \wedge q) \to p$

11.7. $p \to (p \vee q)$

11.8. $[(p \to r) \wedge (q \to s) \wedge (p \vee q)] \to (r \vee s)$

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

(Relation and Function)

1. กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ

1.1. $A \times B = \{(a,b) | a \in A$ และ $b \in B\}$

1.2. โดยทั่วไป $A \times B \neq B \times A$ แต่ถ้า

$A \times B = B \times A$ แล้ว

(1) $A = B$ หรือ

(2) A หรือ B เป็น ϕ

1.3. $A \times \phi = \phi = \phi \times A$

2. ความสัมพันธ์จาก A ไป B หมายถึง สับเซต ของ $A \times B$

2.1. $D_r = \{x | (x,y) \in r\}$

2.2. $R_r = \{y | (x,y) \in r\}$

3. ถ้า $n(A) = m$ และ $n(B) = n$ แล้ว

3.1. $n(A \times B) = mn$

3.2. จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป

$B = 2^{mn}$

3.3. จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป $B = n^m$

4. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

$r^1 = \{(x,y) | (y,x) \in r\}$ และ

$D_{r^{-1}} = R_r, R_{r^{-1}} = D_r$

5. ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน เมื่ออย่างน้อยหนึ่งข้อต่อไปนี้เป็นจริง

5.1. ถ้า $(x,y) \in r$ และ $(x,y) \in r$ แล้ว

$y = z$

5.2. สำหรับแต่ละ x จะจับคู่กับ y ได้เพียงตัวเดียว คือ มี y เพียงตัวเดียวซึ่ง

$(x,y) \in r$

5.3. เมื่อเขียนกราฟแล้วลากเส้นใดๆขนานกับแกน y จะไม่มีเส้นใดตัดกราฟเกิน 1 จุด

6. **f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B** แทนด้วย

$f : A \to B$ หมายความว่า

6.1. f เป็นฟังก์ชัน

6.2. $D_f = A$

6.3. $R_f \subset B$

7. ถ้า $f : A \to B$ และ $R_f = B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แทนด้วย

$f : A \xrightarrow[onto]{} B$

8. ถ้า $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ซึ่งแทนด้วย

$f : A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่ออย่างน้อยหนึ่งข้อต่อไปนี้เป็นจริง

8.1. $(x_1, y) \in r$ และ $(x_2, y) \in r$ แล้ว

$x_1 = x_2$

8.2. สำหรับแต่ละ y จะจับคู่กับ x เพียงตัวเดียวเท่านั้น

8.3. เมื่อเขียนกราฟแล้วลากเส้นตรงใดๆขนานกับแกน x จะไม่มีเส้นใดตัดกราฟเกิน 1 จุด

9. อินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันด้วยก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง มิฉะนั้นจะเป็นเพียงความสัมพันธ์

10. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ $I_A = \{(x,x) | x \in A\}$

11. Composite Function

11.1. $(gof)(x)=g(f(x))$ โดยที่

$D_{gof}=\{x|f(x)\in D_g\}$

gof จะหาได้ ก็ต่อเมื่อ

$R_f \cap D_8 \neq \phi$

11.2. $D_{gof}\subset D_f$ และ $R_{gof}\subset R_8$

11.3. ถ้า $f:A\xrightarrow[onto]{1-1}B$ จะได้ว่า

(1) $f^{-1}of=I_A$

(2) $fof^{-1}=I_B$

(3) $f^{-1}of$ ไม่จำเป็นที่จะต้องเท่ากับ fof^{-1}

12. พีชคณิตของฟังก์ชัน

$D_{f+8}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$

$f\pm g=\{(x,y)|y=f(x)\pm g(x)\}$

$f\cdot g=\{(x,y)|y=f(x)\cdot g(x)\}$

$\frac{f}{g}=\left\{(x,y)\middle|y=\frac{f(x)}{g(x)};g(x)\neq 0\right\}$

13. การเท่ากันของฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g

(1) $D_f=D_g$ และ

(2) $f(x)=g(x)$ ทุกๆ ค่า x ในโดเมน

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และเส้นตรง

(Geometry & Line)

1. ระยะระหว่างจุด (x_1,y_1) และ (x_2,y_2) คือ

$d\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (x_1,y_1) กับ (x_2,y_2)

คือ $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3. จุด R ที่แบ่งจุด $P(x_1,y_1)$ กับจุด $Q(x_2,y_2)$

ทำให้ $PR:RQ=m:n$

3.1. แบบภายใน คือ

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

3.2. แบบภายนอก คือ

$\left(\frac{mx_2-nx_2}{m-n},\frac{my_2-ny_2}{m-n}\right)$

4. จุดตัดของเส้นมัธยฐานของ Δ ที่มีจุดยอดที่

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ และ (x_3,y_3) คือ

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

5. พื้นที่รูป n เหลี่ยม ที่มีจุดยอดที่

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ คือ

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3 ..... & x_n & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 ..... & y_n & y_1\end{vmatrix}$

6. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1,y_1) และ

(x_2,y_2) คือ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\theta$

7. เส้นตรง 2 เส้นที่มีความชัน m_1 และ m_2

7.1. ขนานกัน เมื่อ $m_1=m_2$

7.2. ตั้งฉากกัน เมื่อ $m_1m_2=-1$

7.3. ทำมุมกัน มีมุมหนึ่งเป็น

$\tan^{-1}\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$ เมื่อ $m_1>m_2$

8. สมการเส้นตรง

8.1. รูปทั่วไป $Ax+By+C=0$ ความชัน

$m=-\frac{A}{B}$

8.2. ความชันและส่วนตัดแกน $y=mx+c$

8.3. ความชันและจุดผ่าน 1 จุด

$y-y_1=m(x-x_1)$

8.4. บอกส่วนตัดแกน x และ y $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

9. ระยะจากจุด (x_1,y_1) ไปยัง

$Ax+By+C_1=0$ และ $Ax+By+C_2=0$

คือ $d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

10. ระยะระหว่างเส้นขนาน $Ax+By+C_1=0$

และ $Ax+By+C_2=0$ คือ

$d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

เรื่อง ภาคตัดกรวย (Conic Section)

1. **วงกลม**

สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จุดศูนย์กลาง (h,k) รัศมี r

เส้นสัมผัสจากจุด (x_1,y_1) ไปยังวงกลม

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

มีความยาว $d=\sqrt{x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C}$

2. **พาราโบลา**

สมการ $(x-h)^2=4c(y-k)$ หรือ

$(y-k)^2=4c(x-h)$

จุดยอดคือ (h,k)

สมการไดเรกตริกซ์ $y=k-c$ หรือ

$(y-k)^2=4c(x-h)$ ตามลำดับ

เส้นสาลัสเรกตัมยาว $|4c|$

ข้อสังเกต : ตัวแปร x หรือ y ที่ยกกำลังหนึ่งในสมการเป็นทิศทางของแกนสมมาตร

3. **วงรี**

สมการ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ หรือ

$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

โดยที่ $a^2=b^2+c^2$

จุดศูนย์กลาง (h,k) แกนเอกยาว $2a$ แกนโทยาว $2b$

ผลรวมคงที่คือ $2a$ เส้นลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$

ความรี (eccentricity) $e=\dfrac{c}{a}$

ข้อสังเกต : $a>b$ เสมอ และถ้า a อยู่ใต้ใครในสมการวงรี แกนนั้นเป็นแกนหลัก

4. **ไฮเปอร์โพลา**

สมการ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ หรือ

$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

โดยที่ $c^2=a^2+b^2$

จุดศูนย์กลาง (h,k) แกนตามขวางยาว $2a$ แกนสังยุคยาว $2b$

ผลต่างคงที่คือ $2a$ เส้นลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$

สมการอะซิมโทตคือ $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$

หรือ $(y-k)=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

เรื่อง สถิติ ตอนที่ 1 (Statistics : Part I)

1. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Men)**

1.1. $\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{N}=\dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

1.2. ถ้า $y_i=ax_i+b$ จะได้ว่า $\bar{Y}=a\bar{X}+b$

1.3. $\sum(x_i-a)^2$ จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $a=\bar{X}$

2. **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** (Geometric Mean) และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (Harmonic Mean)

2.1. $G.M.=(x_1x_2.....x_n)^{\frac{1}{n}}$

2.2. $H.M.=\dfrac{N}{\sum\frac{1}{x_i}}=\dfrac{\sum f_i}{\sum\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}$

2.3. $\bar{x}\ge G.M.\ge H.M.$

3. **ฐานนิยม** (Mode)

$Mode=L+C\left(\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\right)$

เมื่อ L และ C เป็นขอบล่างและความกว้างของชั้นพื้นฐานนิยมตามลำดับ

4. **มัธยฐาน** (Median)

4.1. ตำแหน่งมัธยฐาน $=\begin{cases}\dfrac{N+1}{2}\\ \dfrac{N}{2}\end{cases}$

4.1.1. $\dfrac{N+1}{2}$ ในกรณีไม่แบ่งอันตภาคชั้น

4.1.2. $\dfrac{N}{2}$ ในกรณีแบ่งอันตภาคชั้น

4.2. $Median = L + C\left(\frac{F_N - F_1}{F_2 - F_1}\right)$

4.3. $\sum \left| x_i - Median \right| \le \sum \left| x_i - a \right|$ เมื่อ

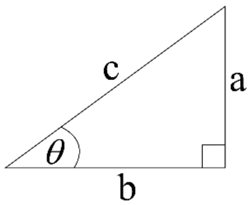
$a \in R$

ค่ากึ่งกลางพิสัย (Mid-Range) $= \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$

เรื่อง ตรีโกณมิติ ตอนที่ 1

(Trigonometry : Part I)

นิยามสามเหลี่ยมมุมฉาก



$\sin\theta = \frac{a}{c}$

$\cos\theta = \frac{b}{c}$

$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ส่วนกลับ $\sin\theta \leftrightarrow \operatorname{cosec}\theta$

$\cos\theta \leftrightarrow \sec\theta$

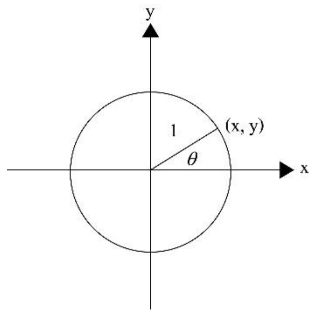
$\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$

$Co - fn$ $\sin\theta \leftrightarrow \cos\theta$

$\sec\theta \leftrightarrow \operatorname{cosec}\theta$

$\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$

นิยาม วงกลม 1 หน่วย



$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

เครื่องหมาย +

sin	all
tan	cos

ค่า Trigonometry

	30°	45°	60°
sin	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

fn **ราบ** $\Rightarrow$ fn **เดิม,** fn **ดิ่ง** $\Rightarrow$ $Co - fn$

เครื่องหมายดูตามควอดรันต์

กราฟ

ฟังก์ชันตรีโกณ	**Amplitude**	**คาบ**
$y = A\sin Bx$, $y = A\cos Bx$	$\lvert A \rvert$	$\left\lvert \frac{2\pi}{B} \right\rvert$
$y = A\tan Bx$	ไม่มี	$\left\lvert \frac{\pi}{B} \right\rvert$

เรื่อง เอกซ์โปเนนเชียล (*Exponential*)

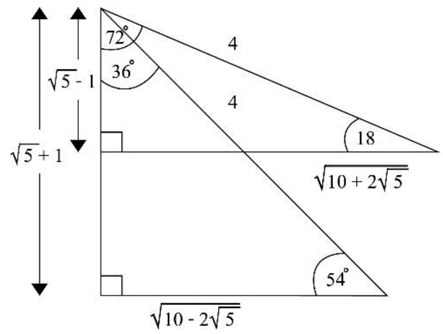
เมื่อ $a, b > 0$

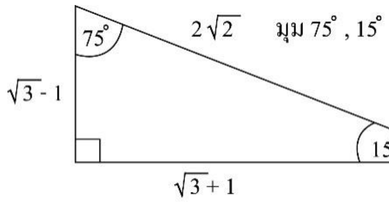
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
7. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
9. $a^{0=1}$ เมื่อ $a \neq 0$
10. $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \left|\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right|$

เรื่อง ลอการิทึม (*Logarithm*)

1. $\log_a M = x$ ก็ต่อเมื่อ $a^x = M$
2. $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$
3. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
4. $\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\dfrac{M}{N}\right)$
5. $\log_a M^p = p \log_a M$
6. $\log_N M = \dfrac{\log_a M}{\log_a N}$ โดยทั่วไปนิยมเปลี่ยนเป็นฐาน 10
7. $a^{\log_a M} = M$
8. $a^{\log_a N} = N^{\log_a M}$
9. $\log_{N^b} M^a = \dfrac{a}{b} \log_N M$
10. $In\ M = \log_e M \approx \dfrac{\log M}{0.4343}$ โดยที่ $e = 2.71828\ldots$

เรื่อง ตรีโกณมิติ ตอน 2 (*Trigonometry : Part II*)





1. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

   $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

   $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$
2. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

   $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

   $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

   $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
3. $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

   $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

   $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

   $\cos A - \cos B = -2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
4. $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

   $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

   $= 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

   $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
5. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

   $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

   $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
6. $\sin^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2}, \cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2}$

$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

7. $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

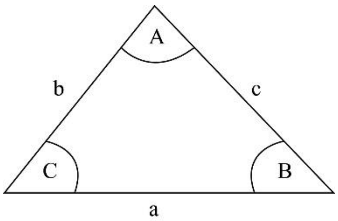
8. กฎของไซน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R$

เมื่อ R = รัศมีของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

9. กฎของไคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

และ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

10. พื้นที่



$\Delta ABC = \frac{1}{2}bc\sin A$

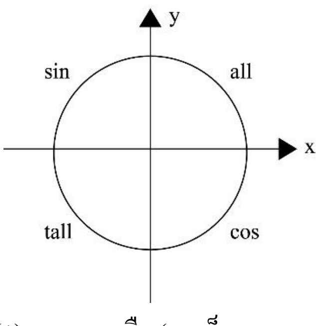
$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$

โดยที่ $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ

r = รัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

Note : การหาค่าโดยหา 3 อย่าง



(1) มุมคงเหลือ (มุมเล็ก

(2) ฟังก์ชัน $Co-$ ไม่ Co

เครื่องหมายคำตอบ

เรื่อง เมตริกซ์ (Matrix)

1. A, B, C **เป็นเมตริกซ์**

1.1. $A+B = B+A$ แต่ AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

1.2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ และ $A(BC) = (AB)C$

1.3. $A(B+C) = AB+AC, (B+C)A = BA+CA$

1.4. ถ้า $AB = AC$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $B = C$

1.5. ถ้า $AB = Q$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $A = Q$ หรือ $B = Q$

2. A, B **เป็นเมตริกซ์**

2.1. $(A^t)^t = A$

2.2. $(A+B)^t = A^t + B^t$

2.3. $(AB)^t = B^t A^t$

2.4. $(kA)^t = kA^t, k \in R$

2.5. $(A^{-1})^{-1} = A$

2.6. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.7. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$

2.8. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

2.9. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

3. ดีเทอร์มิเนนต์ (*Determinant*)

3.1 ถ้า $A = [a]$ จะได้ $\det A = a$

3.2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = ad - bc$

3.3 ถ้า C_{ij} เป็นโคแฟกซ์เตอร์ (*Cofactor*) ของ a_{ij} จะได้

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$$

3.4 $\det A^t = \det A$

3.5 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ และ $\det(A^n) = (\det A)^n$

3.6 $\det A^{-1} \frac{1}{\det A}, A$ เป็น *non-singular matrix*

3.7 $\det kA = k^n \det A$ เมื่อ n คือจำนวนแถวของ A

3.8 $\det(A \pm B)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\det A \pm \det B$

4. A เป็น *non-singular matrix*

4.1. ถ้า $A = [a]$ จะได้ $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

4.2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

4.3. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} AdjA$ โดยที่

$Adj\, A = [c_{ij}]^t$

4.4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4.5. $(A^{-1})^{-1} = A$

4.6. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4.7. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

4.8. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}, k \in R, k \neq 0$

5. ระบบสมการ $AX = B, B \neq \underline{0}$

5.1. ถ้า $|A| \neq 0$ ระบบสมการมีคำตอบเดียว และคำตอบคือ $X = A^{-1}B$

5.2. ถ้า $|A| = 0$

(1) ระบบสมการไม่มีคำตอบ

(2) ระบบสมการมีคำตอบไม่จำกัดจำนวน

ระบบสมการ $AX = \underline{0}$

5.3. ถ้า $|A| \neq 0$ ระบบสมการมีคำตอบเดียว และคำตอบคือ $X = \underline{0}$

ถ้า $|A| = 0$ ระบบสมการมีคำตอบไม่จำกัดจำนวน

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น (*Linear Programming*)

1. อสมการและกราฟ

ทฤษฎี ให้ f เป็นฟังก์ชันในเซต $R \times R$

(1) กราฟของอสมการ $y > f(x)$ คือ บริเวณที่อยู่เหนือกราฟของ $y = f(x)$

(2) กราฟของอสมการ $y < f(x)$ คือ บริเวณที่อยู่ใต้กราฟของ $y = f(x)$

(3) กราฟของอสมการ $x > f(y)$ คือ บริเวณที่อยู่ทางขวาของกราฟ $x = f(y)$

(4) กราฟของอสมการ $x < f(y)$ คือ บริเวณที่อยู่ทางซ้ายของกราฟ $x = f(y)$

2. ระบบอสมการ

ถ้าระบบอสมการประกอบด้วย อสมการย่อยๆ n อสมการ คือ $P_1(x, y), P_2(x, y), ..., P_n(x, y)$ ซึ่งแต่ละอสมการเหล่านี้มีกราฟเป็น $G_1, G_2, ..., G_n$ ตามลำดับ แล้วกราฟของระบบอสมการดัง กล่าวคือ $G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$

3. ระบบอสมการเชิงเส้น

นิยาม อสมการเชิงเส้น (*Linear inequality*) ที่ประกอบด้วยตัวแปร x และ y คือ อสมการที่เขียนได้ในรูปใดรูปหนึ่งต่อไปนี้

$$\begin{cases} ax + by + c > 0 \\ ax + by + c < 0 \\ ax + by + c \geq 0 \\ ax + by + c \leq 0 \end{cases}$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่ และ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

นิยาม ระบบอสมการเชิงเส้น คือ ระบบอสมการที่มีทุกอสมการย่อยเป็นอสมการเชิงเส้น

นิยาม เรียกจุดที่เกิดจากการตัดกัน ของเส้นขอบของกราฟของระบบอสมการว่า จุดมุม (corner point) ของกราฟ

4. กำหนดการเชิงเส้น

ตัวแบบ (model) ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

(1) ฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective function) อยู่ในรูป

$P = ax + by$

(2) ข้อจำกัดหรือเงื่อนไขบังคับ (Constraint) อยู่ในรูปของระบบอสมการเชิงเส้น

ทฤษฎี กำหนดเส้นตรง ℓ เป็นกราฟของ สมการเชิงเส้น $ax + by = P$ เมื่อ P เป็นตัวแปรเสริม *(Parameter)* จะได้ว่า

(1) ถ้า $b > 0$ แล้ว ℓ ตัดแกน y ในตำแหน่งสูงขึ้น เมื่อ P เพิ่มขึ้น และ ℓ ตัดแกน y ใน ตำแหน่งต่ำลง เมื่อ P ลดลง

(2) ถ้า $b > 0$ แล้ว ℓ ตัดแกน y ในตำแหน่งสูงขึ้น เมื่อ P ลดลง และ ℓ ตัดแกน y ใน ตำแหน่งต่ำลง เมื่อ P เพิ่มขึ้น

ทฤษฎี ฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มีเงื่อนไข บังคับเป็นเซตที่มีขอบเขต (บริเวณที่มีพื้นที่จำกัด) จะมีทั้งค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ซึ่งทั้งสองจะเกิดขึ้นที่ จุดมุมของกราฟ

หมายเหตุ ในกรณีที่เงื่อนไขบังคับเป็นเซตที่ ไม่มีขอบเขต (บริเวณที่มีพื้นที่ไม่จำกัด) ฟังก์ชันจุดประสงค์จะมีค่าสูงสุด (ค่าต่ำสุด) หรือไม่ก็ได้ แต่ถ้ามี ค่านั้นจะเกิดขึ้นที่จุดมุมของกราฟเช่นกัน

เรื่อง เวกเตอร์ (*Vector*)

คุณสมบัติของระบบเวกเตอร์ (และระบบเวกเตอร์สเปซ) ใน $U = \{\, x | x \text{ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ } \}$

คุณสมบัติการบวก

1. คุณสมบัติปิด $\bar{u} + \bar{v} \in u$
2. คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ $\bar{u} + (\bar{v}) + \bar{w}$
3. คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์

   $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$
4. คุณสมบัติการมีอินเวอร์ส

   $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

   $(-\bar{u}$ คือนิเสธของเวกเตอร์ $\bar{u})$
5. คุณสมบัติการสลับที่ $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

คุณสมบัติการคูณด้วยสเกลาร์

6. คุณสมบัติปิด $m(\bar{u}) \in U$
7. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้

   $(mn)\bar{u} = m(n\bar{u}) = n(m\bar{u})$
8. คุณสมบัติแจกแจง

   $m(\bar{u} + \bar{v}) = m\bar{u} + m\bar{v}, (m+n)\bar{u} = m\bar{u} + n\bar{u}$
9. คุณสมบัติการมีสเกลาร์เอกลักษณ์

   $1(\bar{u}) = (\bar{u})1 = \bar{u}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย

$\bar{i}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วยทางแกน x

$\bar{j}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วยทางแกน y

เวกเตอร์ในระนาบ $x - y$ **ใดๆ** สามารถเขียนในรูป

$\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง

$|\bar{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *slope* ของ $\bar{v} = \dfrac{b}{a}$

การบวกเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

เวกเตอร์ = จุดสิ้นสุด – จุดตั้งต้น

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบแกนมุมฉาก

$$k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ *(dot vector)*

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta \\ \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2 \end{gathered}}$$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \leftrightarrow (\bar{u}) \perp \bar{v}$ ถ้า $|\bar{u}| \neq 0$ และ $|\bar{v}| \neq 0$

$\bar{u} \cdot \bar{v} =$ บวก มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นมุมแหลม

$\bar{u} \cdot \bar{v} =$ ลบ มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นมุมป้าน

$$\boxed{\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}}$$

การคูณเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j},\ \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

Projection ของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ คือ $\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|}$

การขนานและตั้งฉากของเวกเตอร์

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เมื่อ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ถ้า $b \neq 0, d \neq 0$

หรือ $b = d = 0$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ เมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 0$

เมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

คุณสมบัติของเวกเตอร์ที่ใช้ในการพิสูจน์เรขาคณิต

เมื่อ $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ และ $\bar{u} \quad \bar{v}$

1. $\bar{w}$ สามารถเขียนได้เป็น $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$ โดยที่ $a, b \in R$ ได้เสมอ
2. ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ จะได้ $a = b = 0$

ความยาวของ $|\bar{u} + \bar{v}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}|$

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |v|^2 + 2|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos\theta$

$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |v|^2 - 2|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos\theta$

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2\left(|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2\right)$

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 - |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 4(\bar{u} \cdot \bar{v})$

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน *(Complex Number)*

1. $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้

   $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$

   และ $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
2. ถ้า $z = a + bi$ จะได้ $\bar{z} = a - bi$ และ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. 3.1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ และ $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

   3.2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

   3.3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ และ

   $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 ; \bar{\bar{z}} = z$

   3.4. $|z^n| = |z|^n$ และ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

   3.5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. ระบบเชิงขั้ว $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + bi$

   โดยที่ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\tan\theta = \frac{b}{a}$
5. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ

   $z_2 = r_2(\cos_2 + i\sin\theta_2)$

   $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

   $z_1^n = r_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)$

   $z_1^{\frac{1}{n}} = r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right)$

   โดยที่ $k = 0, 1, \ldots, n - 1$
6. ให้ $z_1, z_2, \ldots z_n$ เป็นคำตอบของสมการ

   $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$

   จะได้ว่า $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{{}^{a}n - 1}{a_n}$

   และ $z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{{}^{a}0}{{}^{a}n}$
7. ถ้า $z_1, z_2, \ldots z_n$ เป็นรากของสมการ

   $z^n = a + bi$ จะได้ว่า

   $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = \sqrt[n]{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt[n]{r}$

เรื่อง สถิติ ตอนที่ 2 *(Statistics Part II)*

1. ควอไทล์ (Q_k), เดไซล์ (D_k), เปอร์เซนไทล์ (P_k)

	Med	Q_k	D_k	P_k
ไม่จัดตาราง	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{(N+1)k}{4}$	$\frac{(N+1)k}{10}$	$\frac{(N+1)k}{100}$
จัดตาราง	$\frac{N}{2}$	$\frac{Nk}{4}$	$\frac{Nk}{10}$	$\frac{Nk}{100}$

$$P_k, D_k, Q_k = L + C\left(\frac{F_N - F_1}{F_2 - F_1}\right)$$

2. การวัดกระจายสัมบูรณ์

2.1. พิสัย *(Range)*

$$= X_{\max} - X_{\min}$$

2.2. ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $(Q.D.)$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

2.3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $(M.D.)$

$$= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$$

2.4. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(S.D.)$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ความแปรปรวน *(Variance)* S^2

3. การวัดการกระจายสัมพัทธ์

3.1. สัมประสิทธิ์พิสัย

$$= \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}}$$

3.2. สัมประสิทธิ์ $Q.D.$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

3.3. สัมประสิทธิ์ $M.D.$

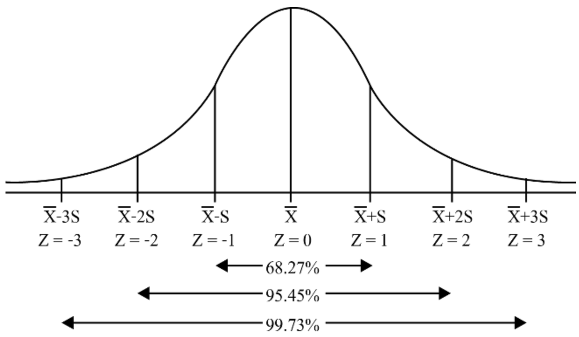
$$= \frac{M.D.}{X}$$

3.4. สัมประสิทธ์การแปรผัน $= \frac{S}{X}$

4. คะแนนมาตรฐาน (Z-score)

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

5. การแจกแจงปกติ



เรื่อง ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

1. ลำดับและอนุกรมเลขคณิต $(A.P.)$

ลำดับ $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรม

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

2. ลำดับและอนุกรมเรขาคณิต $(G.P.)$

ลำดับ $a_n = a_1 r^{n-1}$

อนุกรม $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$

ถ้า $|r| < 1$ จะได้ผลบวกอนันต์คือ $S = \frac{a_1}{1-r}$

3. คอนเวอน์เจนต์และไดเวอร์เจนต์

ถ้าเป็นลำดับให้พิจารณา $\lim_{n\to\infty} a_n$ และถ้าเป็นอนุกรมให้พิจารณา $\lim_{n\to\infty} S_n$ โดยถ้าลิมิตมีค่าเป็นจำนวนจริง เรียกว่า ไดเวอร์เจนต์ $(Divergent)$

* อนุกรมเรขาคณิตคอนเวอร์เจนต์เมื่อ $|r| < 1$

* ถ้าอนุกรมคอนเวอร์เจนต์แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4. สัญลักษณ์ซิกมา

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c(a_1) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. $P-series \quad \left(\sum \frac{1}{n^p}\right)$

ถ้า $p > 1$ แล้ว $\sum \frac{1}{n^p}$

เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $p \le 1$ แล้ว $\sum \frac{1}{n^p}$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

เรื่อง แคลคูลัส $(Calculus)$

1. **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน** $(Derivative)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. **สูตรการหาอนุพันธ์**

(1) $\frac{dc}{dx} = 0$

(2) $\frac{dx}{dx} = 1$

(3) $\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$

(4) $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(5) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

(7) $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

(8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

(9) $\frac{d(\sin u)}{dx} = (\cos u)\frac{du}{dx}$

(10) $\frac{d(\cos u)}{dx} = (-\sin u)\frac{du}{dx}$

(11) $\frac{de}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

(12) $\frac{d\ln u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

3. **การอินทิเกรต (*Integration*)**

3.1. $\int k\,d\,x = k\,x + c$

3.2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c : n \ne -1$

3.3. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ โดย

$F'(x) = f(x)$

4. **ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด**

ถ้า $f'(x) > 0$ ในช่วงใดแล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงนั้น

ถ้า $f'(x) < 0$ ในช่วงใดแล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วงนั้น

5. **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**

หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$ แล้วทดสอบด้วย $f''(x)$

5.1. ถ้า $f''(x) > 0$ จะได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

5.2. ถ้า $f''(x) < 0$ จะได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f''(x) = 0$ แสดงว่าการทดสอบ *Fail*

เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน

(*Permutation and Combination*)

1. **แฟกทอเรียล (*Factorial*)**

$0! = 1$ และ

$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n(n-1)!$

2. **กฎการนับเบื้องต้น**

ในการทำงานซึ่งแบ่งเป็น k ขั้นตอน โดยขั้นที่หนึ่ง ทำได้ n_1 วิธี ขั้นที่สองทำได้ n_2 วิธี .. จนถึงขั้นที่ k ทำได้ n_k วิธี วิธีทำงานทั้งหมดจะเท่ากับ $n_1 \times n_2 \times \ldots x_{nk}$ วิธี

3. **วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง (*Permutation*)**

3.1. ของ n สิ่งแตกต่างกัน เรียงเป็นเส้นตรงได้ $n!$ วิธี

3.2. ของ n สิ่งแตกต่างกัน เรียงเป็นเส้นตรง โดย จัดที่ละ r สิ่ง ได้เท่ากับ

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

3.3. เรียงของซ้ำ : ของ n สิ่ง ซ้ำกันเป็นกลุ่ม ๆ รวม k กลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 มี n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มี n_2 สิ่ง กลุ่มที่ k มี n_k สิ่ง จะมีวิธีจัดเรียงของทั้งหมด $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_{k!}}$ วิธี

4. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

4.1. ของ n สิ่งแตกต่างกัน จัดเรียงเป็นวงกลม ได้ $(n-1)!$ วิธี

4.2. ถ้าเรียงเป็นวงกลมที่มองได้ 2 ด้าน จะจัดได้ $\frac{(n-1)i}{2}$ วิธี

5. วิธีจัดหมู่ (*Combination*)

มีของ n สิ่งแตกต่างกัน เลือกของมาให้มีหมู่ละ r สิ่ง

จำนวนวิธีคือ ${}^{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

*

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

6. แบ่งของ n สิ่งที่ต่างกันออกเป็นกอง ๆ

(โดยยังไม่เรียงหรือยังไม่แจก)

มีของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการแบ่งเป็น

กองละ n_1 ชิ้น m_1 กอง
กองละ n_2 ชิ้น m_2 กอง
กองละ n_3 ชิ้น m_3 กอง
⋮
กองละ n_k ชิ้น m_{k1} กอง

จะแบ่งได้ $\frac{n!}{(n_1!)^{m_1} \cdot m_1!(n_2!)^{m_2} \cdot m_2!\ldots(n_k!)^{mk} \cdot mk}$ วิธี

7. การแจกที่เหมือนกัน

สิ่งของ n สิ่งที่เหมือนกันทั้งหมด ต้องการแจกให้คน k คน โดยมีเงื่อนไขว่า

(1) จะต้องได้ทุกคน ทำได้ $\binom{n-1}{k-1}$ วิธี

(2) บางคนอาจจะไม่ได้เลย ทำได้ $\binom{n+k-1}{k-1}$ วิธี

8. ทฤษฎีบทวินาม (*Binomial Theorem*)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

พจน์ที่ $r+1$ ของการกระจายคือ

$$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

เมื่อ $n \neq 0$

เรื่อง ทฤษฎีความน่าจะเป็น (*Probability*)

1. $P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}$ และ $0 \leq P(E) \leq 1$

2. $P(\phi) = 0$ และ $P(S) = 1$

3. มีเหตุการณ์อันหนึ่งคือเหตุการณ์ E แบ่งเป็นเหตุการณ์ย่อยๆ ในแต่ละขั้นได้ k ขั้น

ขั้นที่ 1 มีโอกาสจะทำสำเร็จ P_1
ขั้นที่ 2 มีโอกาสจะทำสำเร็จ P_2
ขั้นที่ 3 มีโอกาสจะทำสำเร็จ P_3
เกิด
ขั้นที่ k มีโอกาสจะทำสำเร็จ P_k

โอกาสที่จะเหตุการณ์ E คือ $P(E) = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \ldots \times P_k$

4. ในบางครั้งที่ *Prob* ของ E' หาได้ง่าย เราจะใช้สูตร $P(E) = 1 - P(E')$

5. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2)$
$- P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

6. การทดลองอันหนึ่ง โอกาสที่จะสำเร็จในแต่ละครั้งมีค่า

$= p$ โอกาสที่จะล้มเหลวมีค่า $= q$

ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จ r ครั้ง

ในการทดลองที่ทำขึ้นทั้งหมด n ครั้งมีค่า

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

ข้อสังเกต : $p + q = 1$

เรื่อง สถิติ ตอนที่ 8 (*Statisics : Part III*)

1. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรง

สมการ : $y = mx + c$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

สมการปกติ : $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$

* สมการที่ได้จะผ่านจุด $(\bar{x}, \bar{y})$ เสมอ

* สมการทำนายค่า y และสมการทำนายค่า x จะตัดกันที่จุด $(\bar{x}, \bar{y})$

2. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นรูปพาราโบลา

สมการ : $y = ax^2 + bx + c$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

สมการปกติ :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

3. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นรูปเอกซ์โปเนนเชียล

สมการ : $y = ab^x$ หรือ

$$\log y = x\log b + \log a$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log y_i = (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\log a$$

สมการปกติ :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i = (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\log a)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

* สมการที่ใช้ทำนายค่า y จะนำไปทำนายค่า x ไม่ได้